РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ, 10-11 КЛАССЫ

1. Числа

$$-\sin x,\ 4\sin x\cdot \mathrm{ctg}\ 2x,\ \cos x$$

являются членами арифметической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найдите все пары значений x и k, если седьмой член этой прогрессии равен $\frac{1}{5}$.

Ответ: $(x=-\mathrm{arctg}\ \frac{3}{4}+2\pi n, k=11)$; $(x=\pi-\mathrm{arctg}\ \frac{3}{4}+2\pi n, k=15), n\in\mathbb{Z}$.

Решение. В силу характеристического свойства арифметической прогрессии имеем $2a_{k+1}=a_k+a_{k+2}$, что приводит нас к тригонометрическому уравнению

$$8\sin x\cdot \mathrm{ctg}\ 2x=\cos x-\sin x. \qquad (1)$$

Область допустимых значений этого уравнения описывается неравенством $x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. На ОДЗ уравнение (1) равносильно уравнению $4\cos 2x=\cos x(\cos x-\sin x)$, а так как $\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$, то получаем уравнение $(\cos x-\sin x)(3\cos x+4\sin x)=0$, откуда

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n \text{ или } x=-\mathrm{arctg}\ \frac{3}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}. \qquad (2)$$

а) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Тогда $a_k=-\sqrt{2}/2$, $a_{k+1}=0$, то есть разность прогрессии $d=\sqrt{2}/2$. Вспомним, что $a_7=1/5$, значит, $0=a_{k+1}=1/5+\frac{\sqrt{2}}{2}(k-6)$, откуда $k=6-\frac{\sqrt{2}}{5}$ — иррациональное число, что невозможно.

б) $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Тогда $a_k=\sqrt{2}/2$, $a_{k+1}=0$, то есть разность прогрессии $d=-\sqrt{2}/2$. Вспомним, что $a_7=1/5$, значит, $0=a_{k+1}=1/5-\frac{\sqrt{2}}{2}(k-6)$, откуда $k=6+\frac{\sqrt{2}}{5}$ — иррациональное число, что невозможно.

в) $x=-\mathrm{arctg}\ \frac{3}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ Тогда $\mathrm{tg}x=-3/4$, откуда (учитывая, что x — угол IV четверти) $\cos x=4/5$, $\sin x=-3/5$, то есть $a_k=3/5$, $a_{k+2}=4/5$, то есть разность прогрессии $d=1/10$. Вспомним, что $a_7=1/5$, значит, $3/5=a_k=1/5+\frac{1}{10}(k-7)$, откуда $k=11$.

г) $x=\pi-\mathrm{arctg}\ \frac{3}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ Тогда $\mathrm{tg}x=-3/4$, откуда (учитывая, что x — угол II четверти) $\cos x=-4/5$, $\sin x=3/5$, то есть $a_k=-3/5$, $a_{k+2}=-4/5$, то есть разность прогрессии $d=-1/10$. Вспомним, что $a_7=1/5$, значит, $-3/5=a_k=1/5-\frac{1}{10}(k-7)$, откуда $k=15$.

Комментарии. Получено уравнение (1) — 1 балл, найдено его решение (2) — 2 балла, эти баллы суммируются.

2. Последовательность нулей и единиц строится следующим образом: на k-м месте ставится нуль, если сумма цифр десятичной записи числа k чётна, а иначе (если сумма цифр десятичной записи числа k нечётна) ставится единица. Докажите, что эта послеовательность непериодична.

Доказательство. Пусть мы построили последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что данная последовательность имеет период T, то есть $a_{n+T}=a_n$ для любого натурального $n>M$, то есть, возможно, у этой последовательности есть предпериод длины M. Тогда найдётся такое науральное число k, что $10^k>M$ и $10^k>T$. Тогда $10^{k+1}-T>10^{k+1}-10^k=9\cdot10^k>M$. Значит, $a_{10^{k+1}-T}=a_{10^{k+1}}=1$ и $a_{10^{k+2}-T}=a_{10^{k+2}}=1$. То есть $a_{10^{k+1}-T}=a_{10^{k+2}-T}=1$. Но десятичная запись числа $10^{k+2}-T=(10^{k+2}-10^{k+1})+(10^{k+1}-T)=9\cdot10^{k+1}+10^{k+1}-T$ отличается от десятичной записи числа $10^{k+1}-T$ на один разряд, и этот разряд равен 9. А значит, суммы цифр этих двух чисел отличаются на нечётное число, то есть имеют разную чётность, поэтому равенство $a_{10^{k+1}-T}=a_{10^{k+2}-T}$ невозможно. Полученное противоречие доказывает, что наша последовательность непериодическая.

Комментарии. Если, предполагая обратное, команда исходит из условия, что последовательность чисто периодическая, — снимать 1 балл.

3. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 — это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — тоже трапеция.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, а AD и BC — основания трапеции. Рассмотрим окружность ω_A, которая описана вокруг треугольника BCD, тогда BD и A_1C — хорды этой окружности, которые пересекаются в точке O, значит, $OA_1\cdot OC=OB\cdot OD$. Аналогично, рассматривая хорды AC_1 и BD в окружности ω_C, которая описана около треугольника ABD, получаем равенство $AO\cdot OC_1=OB\cdot OD$. Правые части последних двух равенств совпадают, значит, $OA\cdot OC_1=OA_1\cdot OC$. Отсюда

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OA_1}{OC_1} \qquad (2).$$

Аналогично

$$\frac{OD}{OB}=\frac{OD_1}{OB_1}. \qquad (3)$$

По лемме о подобных треугольниках $\triangle AOD$ подобен $\triangle COB$, откуда $\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB}\neq1$. Тогда в силу (2) и (3) получаем равенство $\frac{OA_1}{OC_1}=\frac{OD_1}{OB_1}$. Значит, треугольники A_1OD_1 и C_1OB_1 подобны по пропорциональности двух сторон и вертикальным углам. Но тогда $\angle OA_1D_1 = \angle OC_1B_1$ и они накрест лежащие при прямых A_1D_1 и B_1C_1, а значит, $A_1D_1 \| B_1C_1$. С учётом того, что диагонали $A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O и не делятся ею пополам, получаем, что $A_1B_1C_1D_1$ — трапеция. ЧТД.

Комментарии. Получены равенства (2) и (3), а дальнейших продвижений нет — 2 балла. Если команда в своём решении не упомянула тот факт, что $OA_1 \neq OC_1$, — снимать 1 балл.

4. Положительные числа a, b, c, d таковы,что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |x| + |y| = b \end{cases}$$

имеет m решений, а система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c, \\ |x| + |y| + |z| = d \end{cases}$$

имеет n решений. Известно, что $m > n > 1$. Найдите m и n.

Ответ: $n = 6$, $m = 8$.

Решение. Будем рассматривать геометрические интерпретации решений этих систем. Первая система отвечает на вопрос об общих точках окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt{a}$ и квадрата с вершинами в точках $(b, 0), (-b, 0), (0, b), (0, -b)$.

Если $\sqrt{a} < b\sqrt{2}/2$, а также если $\sqrt{a} > b$, то точек пересечения нет, а значит, первая состема не имеет решений, нас это не устраивает по условию.

Если $\sqrt{a} = b\sqrt{2}/2$, то окружность вписана в квадрат, а значит, у них 4 общие точки, первая система имеет 4 решения.

Если $b\sqrt{2}/2 < \sqrt{a} < b$, то окружность пересекает каждую сторону квадрата в двух **внутренних** точках, а значит, первая система имеет 8 решений.

Наконец, если $\sqrt{a} = b$, то окружность описана около квадрата, у них 4 общих точки. Значит, первая система имеет 4 решения. В итоге **первая система может иметь нуль, четыре или восемь решений**.

Перейдем к исследованию второй системы уравнений. Мы изучаем пересечение сферы с центром в начале координат радиуса $\sqrt{c}$ с правильным октаэдром, вершины которого — это точки $(\pm d; 0; 0), (0; \pm d; 0), (0; 0; \pm d)$. Если $\sqrt{c} < d\sqrt{3}/3$ или $\sqrt{c} > d$, то вторая система решений не имеет, так как расстояние от центра октаэдра до его граней больше радиуса сферы или же все точки октаэдра лежат строго внутри сферы. Этот случай нам не подходит по условию.

Если $\sqrt{c} = d\sqrt{3}/3$, то сфера вписана в октаэдр, касается каждой из его граней, а значит, имеет 8 общих точек с поверхностью октаэдра. Тогда вторая система имеет 8 решений, но это не меньше количества решений первой системы в любом случае. Значит, и этот случай нам не подходит.

Если $d\sqrt{3}/3 < \sqrt{c} < d$, то плоскости граней октаэдра являются секущими для сферы, причем радиус окружности в их пересечении равен $\sqrt{c - d^2/3}$, что меньше, чем $d\sqrt{6}/3$ (это в точности радиус окружности, описанной около грани октаэдра), то есть пересечение сферы и октаэдра содержит дуги окружностей, а значит, бесконечное число точек. Этот случай нам тоже не подходит.

Наконец, если $\sqrt{c} = d$, то сфера описана около октаэдра, у них 6 общих точек (вершины октаэдра). И это единственный случай, который нас может устроить: первая система имеет 8 решений, а вторая — 6 решений. Других вариантов нет.

Комментарии. Только правильный ответ — 1 балл. Правильное исследование первой системы (геометрическим или аналитическим способами) — 3 балла. Правильное исследование второй системы (геометрическим или аналитическим способами) — 4 балла.

5. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет чётное число решений?

Ответ: нет, не может.

Доказательство.

Первый случай. Пусть $f(x)$ — многочлен нечётной степени. Тогда если x_0 — наибольший из корней его производной (если таковые есть), то $f'(x)$ сохраняет знак для всех $x > x_0$, а значит, $f(x)$ монотонно и неограниченно возрастает (или убывает) при $x \to +\infty$. Аналогично рассматриваем x_1 — наименьший из корней производной $f'(x)$ и получаем, что $f(x)$ возрастает (или убывает) при $x \leq x_1$ (поведение функции одинаковое, так как производная многочлена нечётной степени имеет чётную степень). Итак, найдётся такое $M > 0$, что прямая $y = a$ для любого $a > M$ и $a < -M$ пересекает график нашего многочлена ровно в одной точке. Итак, в случае нечётной степени многочлена $f(x) =$ может иметь 1 решение, условие задачи не выполняется.

Второй случай. Пусть $f(x)$ — многочлен чётной степени. Производная $f'(x)$ имеет нечётную степень. Так как многочлен нечётной степени принимает как положительные, так и отрицательные значения (следует, например, из рассуждений о поведении многочленов нечётной степени в бесконечностях, приведённых при рассмотрении первого случая), то производная $f'(x)$ имеет корень, а значит, у многочлена $f(x)$ есть критические точки, а его точки экстремума содержатся среди них. Точку экстремума отличает то, что при переходе через неё производная меняет знак, а это (по методу волны) возможно лишь если критическая точка многочлена $f(x)$ — это корень его производной нечётной кратности. Если число корней нечётной кратности у $f'(x)$ чётно, то суммарная степень всех кратностей корней чётна, а степень $f'(x)$ нечётна. Значит, если отделить все корни $f'(x)$, то получим многочлен нечётной степени без корней, что невозможно. Итак, мы доказали, что **у любого многочлена чётной степени нечётное число точек экстремума**. Рассмотрим все значения $a_1, a_2, \ldots, a_l$ многочлена $f(x)$, которые являются его экстремумами. Рассмотрим прямые $y = a_k, k = 1..l$. На каждой из них отметим точки, абсциссы которых — это точки экстремума $f(x)$. Так как всего точек экстремума нечётное количество, то на одной из прямых, пусть $y = a$ (где a одно из наших чисел $a_1, \ldots, a_l$), будет отмечено нечётное число точек. Рассмотрим эту прямую. График $f(x)$ меняет полуплоскость при переходе через точку пересечения с прямой $y = a$ тогда и только тогда, когда эта точка имеет абсциссу, НЕ являющуюся точкой экстремума. Если мы предположим, что точек пересечения графика многочлена и рассматриваемой прямой чётно, то тогда точек, абсциссы которых — НЕ точки экстремума, нечётно, а значит, график функции $f(x)$ на бесконечностях имеет разные знаки (он сменил полуплоскость нечётное число раз), что невозможно для многочлена чётной степени. Итак, уравнение $f(x) = a$ иммет нечётное число корней. В обоих случаях, утврждение задачи неверно. ЧТД

Комментарии. Утверждение о наличии вещественного корня у многочлена нечётной степени принимать без доказательства. Правильное рассмотрение случая многочлена нечётной степени — 2 балла. Правильное рассмотрение случая многочлена чётной степени — 5 баллов. Эти баллы суммируются.